

9 класс

Задача 1. Два осколка. Небольшую петарду подвесили на нити на высоте H над горизонтальной поверхностью. В результате взрыва она распалась на два осколка, которые полетели в противоположные стороны с одинаковыми начальными скоростями v_0 , направленными вдоль одной прямой. Какое наибольшее расстояние L может оказаться между осколками после их падения? С места падения осколки не смещаются

Возможное решение (1). (Слободянин В.). Пусть первый осколок имел проекцию скорости на вертикальную ось $v_{y,0}$, а на горизонтальную ось $v_{x,0} = \sqrt{v_0^2 - v_{y,0}^2}$ и летел до падения в течение времени t_1 . Тогда второй осколок имел проекцию скорости на вертикальную ось $-v_{y,0}$, а на горизонтальную ось $-v_{x,0} = -\sqrt{v_0^2 - v_{y,0}^2}$ и летел до падения в течение времени t_2 .

Расстояние между упавшими осколками $L = v_{x,0}(t_1 + t_2)$.

Из кинематических соотношений (в проекции на вертикальную ось) получим два квадратных (относительно времени) уравнения:

$$1) H + v_{y,0}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0; \quad 2) H - v_{y,0}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0.$$

Их корни равны: $3) t_1 = \frac{v_{y,0}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{y,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}; \quad 4) t_2 = -\frac{v_{y,0}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{y,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}.$

Отсюда

$$5) L = 2v_{x,0} \sqrt{\left(\frac{v_{y,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} = 2\sqrt{v_0^2 - v_{y,0}^2} \sqrt{\left(\frac{v_{y,0}}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} = \frac{2}{g} \sqrt{v_0^2 - v_{y,0}^2} \sqrt{v_{y,0}^2 + 2gH}.$$

Возведём в квадрат это уравнение и приведём подобные:

$$6) v_{y,0}^4 + (2gH - v_0^2)v_{y,0}^2 + \left(\frac{gL}{2}\right)^2 - 2gHv_0^2 = 0.$$

Это биквадратное уравнение дискриминант которого

$$D = \left(gH - \frac{v_0^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{gL}{2}\right)^2 + 2gHv_0^2$$

равен нулю тогда, когда расстояние L достигнет максимума. Следовательно,

$$L_{\max} = 2H + \frac{v_0^2}{g}.$$

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>

Примечание. В уравнении (5): $L = \frac{2}{g} \sqrt{(V_0^2 - V_{0y}^2)(V_{0y}^2 + 2gH)}$ выражение под корнем – перевёрнутая парабола, которая принимает наибольшее значение строго посередине между корнями V_0^2 и $(-2gH)$. При этом сомножители под радикалом равны. Отсюда

$$L = \frac{2}{g} 0,5 \cdot (V_0^2 + 2gH) = \frac{V_0^2}{g} + 2H. \quad (\text{случай А})$$

Возможное решение (2). 1) Из закона сохранения механической энергии следует, что на землю осколки упадут с одинаковой скоростью v_1 :

$$m \frac{v_1^2}{2} = mgH + m \frac{v_0^2}{2}.$$

При этом сумма траекторий их полёта будет представлять траекторию полёта тела, брошенного с начальной скоростью v_1 .

2) Дальность полёта тела, брошенного под углом 45° к горизонту максимальна и равна

$$L = \frac{v_1^2}{g}$$

(начальная и конечная точки траектории лежат на одной высоте).

Решая совместно полученные уравнения, найдём:

$$L_{\max} = 2H + \frac{v_0^2}{g}.$$

Примечание: Если $v_0^2 = 2gH$, то сразу после распада шара его осколки должны полететь горизонтально и $L_{\max} = 4H$.

Если $v_0^2 < 2gH$ то осколки петарды полетят со скоростью v_0 вдоль горизонтали. Их время

падения $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, а искомое расстояние

$$L_{\max} = 2v_0 t = 2v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (\text{случай Б})$$

Критерии оценивания

Для решения (1)

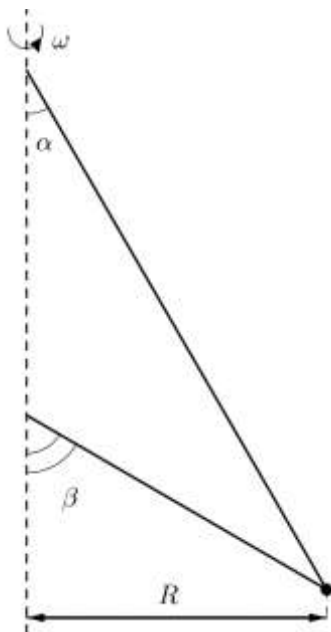
- | | |
|---|----------------|
| 1) Записано выражение для $v_{x,0}$ через $v_{y,0}^2$ обоих осколков | 1 балл |
| 2) Дано выражение $L = v_{x,0}(t_1 + t_2)$ для расстояния между упавшими осколками | 1 балл |
| 3) Записаны уравнения (1) и (2) для нахождения времён | 2 балла |
| 4) Решены уравнения (1) и (2) относительно времён t_1 и t_2 | 2 балла |
| 5) Получено уравнение (5) | 2 балла |
| 6) Найдена максимальная дальность разлёта осколков (по 1 баллу за каждый из двух случаев (А) и (Б)) | 2 балла |

Для решения (2)

- | | |
|---|----------------|
| 1) Отмечено, что на землю осколки упадут с одинаковой скоростью | 2 балла |
| 2) Отмечено, что сумма траекторий их полёта будет представлять траекторию полёта тела, брошенного с начальной скоростью v_1 . | 2 балла |
| 3) Записан закон сохранения механической энергии | 2 балла |
| 4) L_{\max} выражена через v_1 | 2 балла |
| 5) Найдена максимальная дальность разлёта осколков (по 1 баллу за каждый из двух случаев (А) и (Б)) | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>

Задача 2. Шарик на нитях. Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 25,0$ см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис. 1), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Найдите значения угловой скорости ω при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².



Возможное решение (Варламов С.).

А) Пусть верхняя нить натянута сильнее. Тогда:

$$\begin{aligned} 1) \quad m\omega^2 R &= 2T \sin \alpha + T \sin \beta; \\ 2) \quad mg - 2T \cos \alpha - T \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений получим:

Рис. 1

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{2 \sin \alpha + \sin \beta}{2 \cos \alpha + \cos \beta}} \approx 0,914 \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 5,7 \text{ с}^{-1}.$$

Б) Пусть теперь нижняя нить натянута сильнее. Тогда:

$$\begin{aligned} 1) \quad m\omega^2 R &= T \sin \alpha + 2T \sin \beta; \\ 2) \quad mg - T \cos \alpha - 2T \cos \beta &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{\sin \alpha + 2 \sin \beta}{\cos \alpha + 2 \cos \beta}} \approx 1,09 \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 6,8 \text{ с}^{-1}.$$

Критерии оценивания

1) Записана система уравнений для случая (А) (по 1,5 балла)	3 балла
2) Решена система уравнений	1 балл
3) Получен численный ответ	1 балл
4) Записана система уравнений для случая (Б) (по 1,5 балла)	3 балла
5) Решена система уравнений	1 балл
6) Получен численный ответ	1 балл

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.
Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>

Задача 3. Два шарика на нитях. Легкий цилиндрический сосуд с жидкостью стоит на двух симметричных опорах. Над одной из них внутри сосуда привязан к дну полностью погруженный в жидкость поплавок объемом $V = 10 \text{ см}^3$ и плотностью $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$. Над другой опорой висит привязанный снаружи шарик такого же объема V и плотностью 3ρ (рис. 1). Плотность жидкости в сосуде равна $\rho_0 = 1200 \text{ кг/м}^3$. Найдите модуль разности сил реакции опор. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

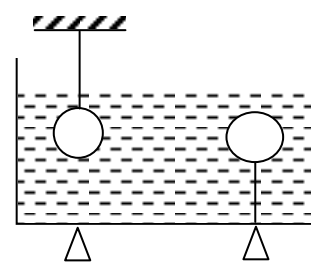


Рис. 1

Возможное решение (Замятнин М.). Расставим силы, действующие на сосуд: F – сила давления на дно, действующая со стороны воды, T – сила натяжения нити, N_1 и N_2 – силы реакций опор (рис. 2).

Запишем правило моментов относительно полюса A :

$$(N_2 + T)2l = Fl.$$

Запишем правило моментов относительно полюса B :

$$N_1 2l = Fl.$$

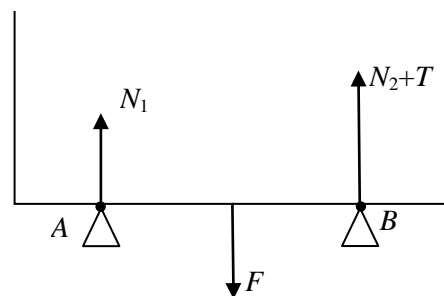


Рис. 2

$F = \rho_0 g HS = \rho_0 g \left(\frac{m}{\rho_0} + 2V \right)$, где H – уровень воды в сосуде, S – площадь дна сосуда, m – масса воды в сосуде.

Запишем условие равновесия для шарика: $T + \rho Vg = \rho_0 Vg$.

$$N_1 = \frac{mg + 2\rho_0 Vg}{2},$$

Решая систему, получим:

$$N_2 = \frac{mg + 2\rho Vg}{2}.$$

$$N_1 - N_2 = (\rho_0 - \rho)Vg = 70 \text{ мН}.$$

Критерии оценивания

1) Записано правило моментов относительно полюса (A)	1 балл
2) Записано правило моментов относительно полюса (B)	1 балл
3) Записано условие равновесия для правого шарика	1 балла
4) Получено выражение для силы F	2 балла
5) Найдена реакция опоры N_1	2 балла
6) Найдена реакция опоры N_2	2 балла
7) Получен ответ	1 балл

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Задача 4. Архимед и температура. Плоская льдинка плавает в сосуде с водой, имеющей температуру $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Минимальная масса груза, который необходимо положить на льдинку, чтобы она полностью погрузилась в воду, равна $m_1 = 100$ г. Если эту льдинку охладить до температуры t_1 и снова положить в тот же сосуд с водой, по-прежнему имеющей температуру t_0 , то после установления теплового равновесия для полного погружения льдинки в воду на неё необходимо будет положить груз минимальной массы $m_2 = 110$ г. Определите температуру t_1 ?

Примечание: удельная теплоемкость льда $c = 2100$ кД/(кг $^\circ\text{C}$), удельная теплота плавления воды $\lambda = 340$ кДж/кг.

Возможное решение. (Кармазин С.). Пусть M_0 – начальная масса льдинки, а M_1 – масса льдинки после ее охлаждения и повторного погружения в жидкость. Охлажденная льдинка в сосуде с водой нагревается до $t = 0^\circ\text{C}$ за счет теплоты, выделяющейся при намерзании на нее массы льда $\Delta M = M_1 - M_0$. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$C_{\text{л}}M_0(0 - (-t_1)) = \lambda\Delta M. \quad (1)$$

Условие плавания льдинки в первом случае

$$M_0 + m_1 = \rho_{\text{в}}(M_0/\rho_{\text{л}}) \quad (3)$$

и во втором случае

$$M_1 + m_2 = \rho_{\text{в}}(M_1/\rho_{\text{л}}) \quad (4)$$

где $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{л}}$ – плотности воды и льда соответственно.

Из (3) получаем $M_0 = m_1/(\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}} - 1).$ (5)

Вычтем (3) из (4): $\Delta M = (m_2 - m_1)/(\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}} - 1).$ (6)

Подставим (5) и (6) в (1):

$$t_1 = -\lambda(m_2 - m_1)/(c_{\text{л}} m_1) = -16,2^\circ\text{C}$$

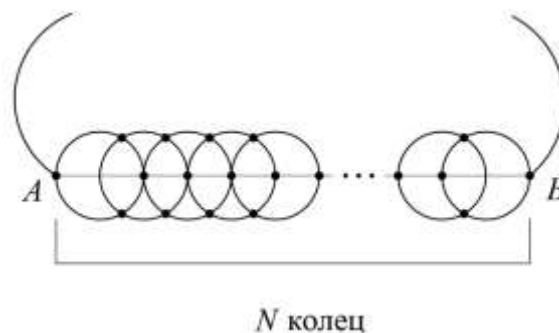
Критерии оценивания

- | | |
|---|---------|
| 1) Записано уравнение теплового баланса | 3 балла |
| 2) Записаны условия плавания для 2 случаев (по 1 баллу) | 2 балла |
| 3) Определена масса ΔM | 2 балла |
| 4) Получен ответ в общем виде | 2 балла |
| 5) Получен числовой ответ | 1 балл |
- (при отсутствии знака «—» балл не ставить!)

18 января, на портале <http://abitunet/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitunet/vseros>

Задача 5. Кольца Ауди. N одинаковых колец соединены так, что между всеми точками их пересечения обеспечен электрический контакт (места контактов отмечены жирными точками). Центры всех колец лежат на одной прямой (рис. 3). Какое сопротивление R_{Σ} покажет омметр, подключенный к точкам A и B этой цепи, если при подключении к диаметрально противоположным точкам уединённого кольца он показывает сопротивление R_0 ? Считать $N > 3$.



Возможное решение (1)

Если сопротивление одного кольца R_0 , то сопротивление проводника, имеющего длину равную длине кольца, будет равно $R = 4R_0$. Тогда сопротивление проводника длиной равной трети и шестой части кольца будет равно $R/3$ и $R/6$ соответственно.

В силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через узлы A и B , в цепи не будет токов, идущих из верхней половины цепи в нижнюю (и наоборот). Следовательно, все центральные узлы можно разъединить вдоль оси, проходящей через A и B . Тогда схема может быть сведена к набору последовательных и параллельных участков, состоящих из резисторов сопротивлением $R/3$ и $R/6$. Верхняя половина упрощенной схемы приведена на рис 4.

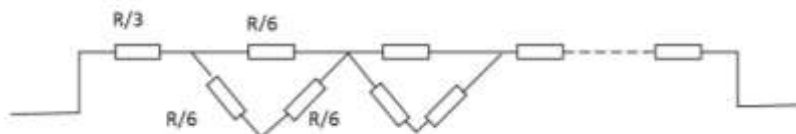


Рис. 4

Тогда сопротивление верхней/нижней части системы, состоящей из N колец, равно:

$$R_{\Sigma_{\text{верх}}} = \frac{R}{3} + (N-2) \frac{\frac{R}{6} \frac{R}{3}}{\frac{R}{6} + \frac{R}{3}} + \frac{R}{3} = 4 \left(\frac{N+4}{9} \right) R_0,$$

а эквивалентное сопротивление всей цепи

$$R_{\Sigma} = \frac{R_{\Sigma_{\text{верх}}}}{2} = 2 \left(\frac{N+4}{9} \right) R_0.$$

Критерии оценивания

- | | | |
|----|---|---------|
| 1) | Выражены сопротивления участков кольца | 2 балла |
| 2) | Обоснован разрыв центральных узлов | 2 балла |
| 3) | Приведена упрощенная эквивалентная схема | 2 балла |
| 4) | Найдено сопротивление элементарного треугольника цепи | 2 балла |
| 5) | Найдено эквивалентное сопротивление всей цепи | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>

Возможное решение (2)

Если сопротивление одного кольца R_0 , то сопротивление проводника, имеющего длину равную длине кольца, будет равно $R = 4R_0$. Тогда сопротивление проводника длиной равной трети и шестой части кольца будет равно $R/3$ и $R/6$ соответственно. Обозначим минимальный ток, текущий в ветвях за I , тогда в силу симметрии схемы относительно оси, проходящей через узлы A и B , и с учетом закона Ома, можно расставить токи, текущие в остальных ветвях схемы, как указано на рис. 5.

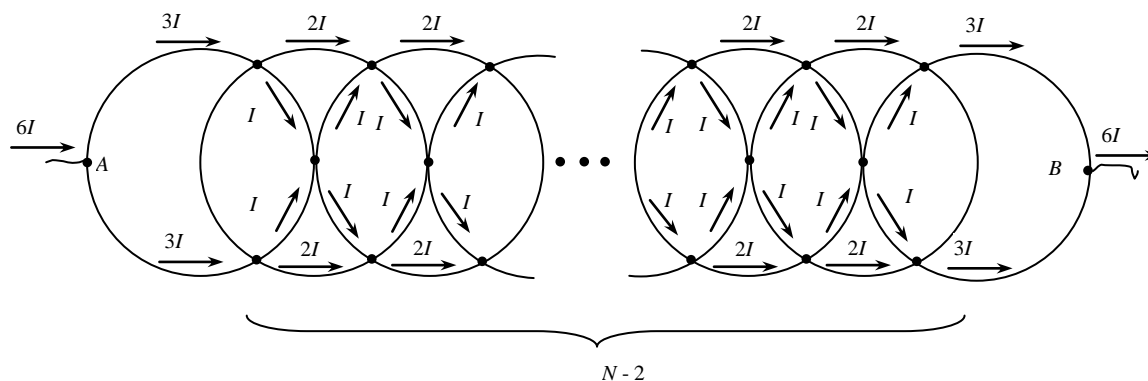


Рис. 5

Напряжение U между узлами A и B равно: $U = 3I \frac{R}{3} + (N-2)2I \frac{R}{6} + 3I \frac{R}{3} = IR \left(\frac{4+N}{3} \right)$,

а эквивалентное сопротивление всей цепи равно: $R_{\text{э}} = \frac{U}{6I} = 2 \left(\frac{4+N}{9} \right) R_0$.

Критерии оценивания

- | | | |
|----|---|----------------|
| 1) | Выражены сопротивления участков кольца | 2 балла |
| 2) | Расставлены токи с учетом симметрии и закона Ома | 4 балла |
| 3) | Выражено общее напряжение через токи и сопротивления ветвей | 2 балла |
| 4) | Найдено эквивалентное сопротивление | 2 балла |

18 января, на портале <http://abitu.net/vseros> будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на портале <http://abitu.net/vseros>