

Задание 11.1. Критическая длина и скорость звука в пластмассовой планке.

Теоретическое введение.

Если отклонить в поперечном направлении свободный конец вертикально закрепленной с одного конца упругой планки (рис. 1) и отпустить, то возникнут свободные поперечные колебания планки вблизи её вертикального положения. Однако, как несложно убедиться экспериментально, такие колебания возникают только в том случае, если длина ℓ свободного, направленного вверх, конца планки не превышает некоторую критическую длину $\ell_{кр}$. В этом случае вертикальное положение планки устойчиво и при небольшом отклонении она возвращается в исходное равновесное положение. Если же $\ell > \ell_{кр}$, то вертикальное положение планки становится неустойчивым и при небольшом поперечном воздействии равновесие планки нарушается, и она заваливается, сильно изогнувшись под действием собственного веса. При $\ell = \ell_{кр}$ вертикальное положение планки соответствует безразличному равновесию.

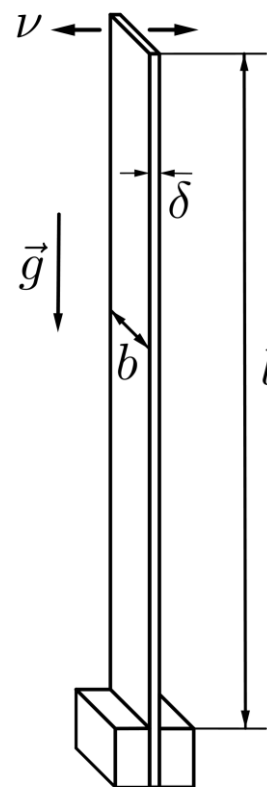


Рис. 1

Критическая длина $\ell_{кр}$, при которой планка теряет устойчивость, определяется плотностью ρ материала планки, его модулем Юнга E и геометрическими размерами свободного конца планки - шириной b и толщиной δ , а также ускорением свободного падения g . Для куба критической длины тонкой ($\delta \ll b$) линейки справедлива формула:

$$\ell_{кр}^3 = \alpha E^m \rho^n b^p \delta^q g^u, \quad (1)$$

где m, n, p, u – некоторые целые числа, $\alpha \approx 2/3$ – безразмерный коэффициент, $q = 2$.

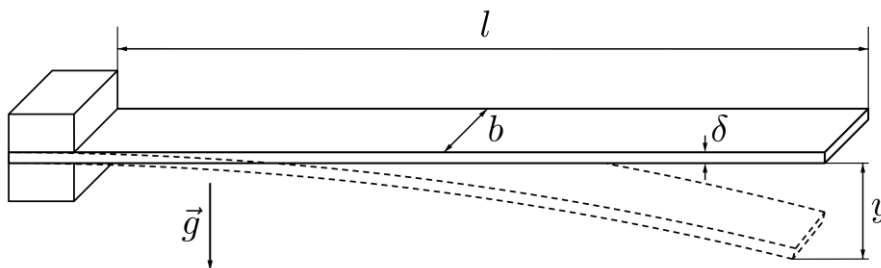


Рис. 2

Таковыми же параметрами определяется прогиб горизонтально закреплённой планки под влиянием собственного веса (рис. 2). Так, максимальное смещение y конца тонкой планки длиной ℓ (так называемая стрела прогиба) можно определить по формуле:

$$y = \beta E^k \rho^r b^s \delta^t g^h \ell^f, \quad (2)$$

где k, r, s, h, f – некоторые **целые** числа, $\beta = 3/2$ – безразмерный коэффициент, $t = -2$.

Отметим, что формула (2) справедлива при условии малости прогиба y ($y < 0,5\ell$).

Как правило, *непосредственно* измерить критическую длину $\ell_{\text{кр}}$ весьма сложно: вблизи критической длины из-за множества случайных факторов, таких как небольшое отклонение от вертикали, неровности, неоднородность материала, планка ведёт себя совершенно непредсказуемо. Точность такого опыта будет невелика. Более точно критическую длину можно определить путём экстраполяции какой-либо величины, зависящей от длины планки, в критическую область. Такой величиной, в частности, является период T (частота $\nu = 1/T$) поперечных колебаний свободного конца планки. Несложно догадаться, какой период (частота) соответствует критической длине. Это позволяет путём линейной экстраполяции зависимости $\nu(\ell)$ в критическую область достаточно точно определить $\ell_{\text{кр}}$. (Кстати, именно таким способом определяются, в частности, температуры различных фазовых переходов: при этом исследуются свойства вещества *вблизи* температуры фазового перехода, а сама температура определяется путём экстраполяции).

В заключение напомним, что модуль Юнга – одна из важных характеристик, определяющая упругие свойства изотропного материала. По закону Гука относительная деформация ε стержня под действием силы F , приложенной перпендикулярно плоскости его поперечного сечения площадью S , равна:

$$\varepsilon = \Delta\ell/\ell = F/ES.$$

Модуль Юнга входит в формулу для скорости звука в различных материалах. Если по торцу тонкого стержня ударить молотком, то по стержню побежит звуковая волна со скоростью $c_{\text{зв}} = (E/\rho)^{1/2}$. Для стали с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7,9$ г/см³ эта скорость равна $c_{\text{зв}} = (E/\rho)^{1/2} \approx 5$ км/с.

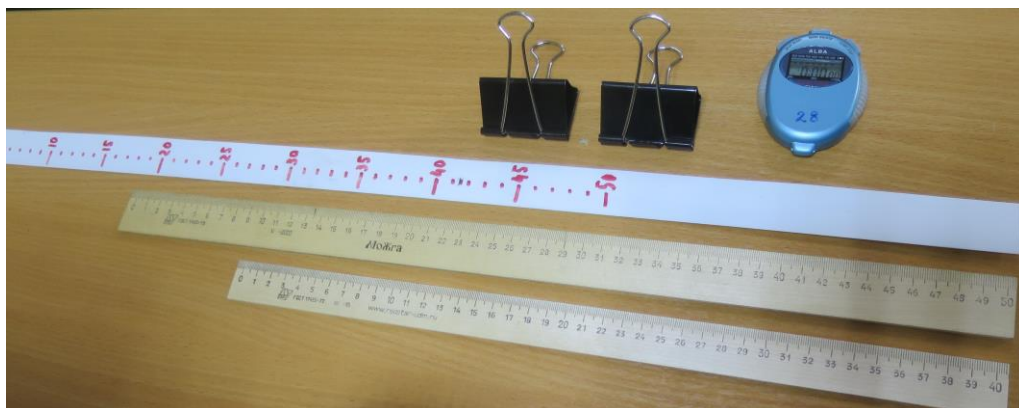
Цель работы.

В данной работе экспериментально определяется критическая длина тонкой ($\delta \ll b$) пластиковой планки. По величине критической длины определяется скорость звука в пластике, из которого изготовлена планка. В работе потребуются:

- руководствуясь общефизическими соображениями, экспериментальными результатами и методом размерностей определить показатели степеней в формулах (1) и (2);
- экспериментально определить численное значение критической длины $\ell_{\text{кр}}$ двумя способами:
 - 1) по периоду колебаний вертикально закреплённой планки;
 - 2) по стреле прогиба горизонтально закреплённой планки;
- используя экспериментальные результаты, определить скорость звука в материале (пластике), из которого изготовлена планка.

Оборудование

Пластиковая планка толщиной $\delta = 1,0$ мм; секундомер; деревянная линейка длиной 50 см; деревянная линейка длиной 25 - 30 см; две канцелярские клипсы (48 мм); миллиметровая бумага формата А4 (2 листа); чистый лист бумаги формата А4. Ножницы выдаются по требованию.



Задание

1. С помощью чистого листа А4 исследуйте зависимость $y \sim b^s$ (напомним, что s – целое число). Приведите рисунок, поясняющий, как вы проводите данную часть эксперимента.
2. Руководствуясь экспериментальными результатами и методом размерностей определите показатели степеней в формулах (1) и (2).

Примечание 1: при малых деформациях планки $y \sim F$, где F – сила, приложенная к планке.

Примечание 2: в формулах (1) и (2) параметр b входит в одной и той же степени.

3. Путём непосредственного измерения сделайте оценку $\ell_{\text{кр}}$.
4. Снимите экспериментальную зависимость периода T свободных колебаний от длины ℓ свободного конца вертикально закреплённой планки $T(\ell)$ (свободный конец планки направлен вверх). Для каждого значения ℓ сделайте как минимум 2 измерения, при этом общее время колебаний в пределах одного опыта не должно быть меньше 10 секунд. Измерения проведите для $\ell \geq (0,6 - 0,7)\ell_{\text{кр}}$. Если колебания быстро затухают, подкачивайте их, слегка подталкивая планку пальцем в такт вблизи её крепления.
5. Постройте график зависимости частоты колебаний ν от длины ℓ колеблющейся части планки $\nu(\ell)$.
6. Проведите через нанесенные точки наилучшую прямую и путем линейной экстраполяции определите $\ell_{\text{кр}}$.
7. По значению $\ell_{\text{кр}}$, полученной в П.6, определите скорость звука $c_{\text{зв}}^{\text{I}}$ в материале планки.
8. Снимите зависимость стрелы прогиба y от длины свободного конца ℓ горизонтально закреплённой планки $y(\ell)$. Измерения проводите в таком диапазоне, для которого $y < 0,5\ell$.
9. Выразите y через $\ell_{\text{кр}}$ и ℓ . Запишите полученную формулу $y = y(\ell_{\text{кр}}, \ell)$.
10. По результатам измерений в П.8 постройте график в подходящих координатах и из него определите $\ell_{\text{кр}}$. Сравните полученное значение со значением $\ell_{\text{кр}}$, полученным методом колебаний (П.6).
11. По значению $\ell_{\text{кр}}$, полученному в П.10, определите скорость звука $c_{\text{зв}}^{\text{II}}$ в материале планки.
12. Сравните значения $c_{\text{зв}}^{\text{I}}$ и $c_{\text{зв}}^{\text{II}}$. Сделайте выводы.

Рекомендации организаторам

1. На каждой из выдаваемых планок необходимо предварительно маркером отметить риски через каждый сантиметр до значения $\ell \approx 55$ см (рис. 3).
2. Короткая линейка должна быть такой же ширины, что и толщина стола, чтобы клипсами можно было прижать ее вместе с вертикальной планкой к торцу (рис. 4).
3. Планку необходимо вырезать из винилового сайдинга. Длина планки приблизительно 70 см, ширина 2,5 см, толщина 1,0 мм (либо указать явно в условии толщину планки, если она иная).
4. «Эталонные» численные значения следует определить для имеющегося у вас оборудования.



Рис. 3

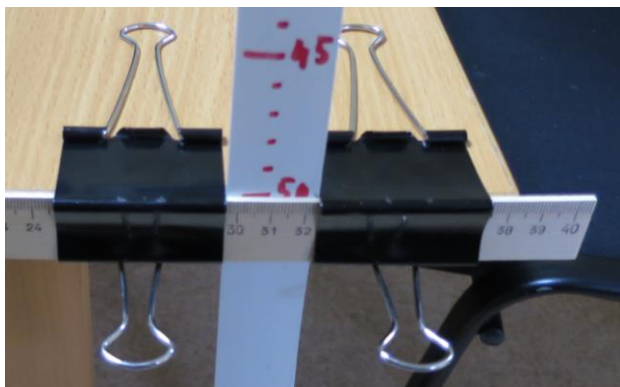


Рис. 4

Возможное решение (Гуденко А.).

1. На чистом листе бумаги делаем прорези, которые делят его на полоски разной ширины (рис. 5). Убеждаемся, что в пределах погрешности (связанной с неоднородностью бумаги) стрела прогиба не зависит от ширины полосок, следовательно, $s = p = 0$.

2. Так как $y \sim F$, а $F \sim g$, то $h = 1$. Тогда, руководствуясь соображениями размерности, получаем:

$$\ell_{\text{кр}}^3 = 2E\delta^2/3\rho g, \quad (3)$$

$$y = 3\rho g\ell^4/2E\delta^2. \quad (4)$$

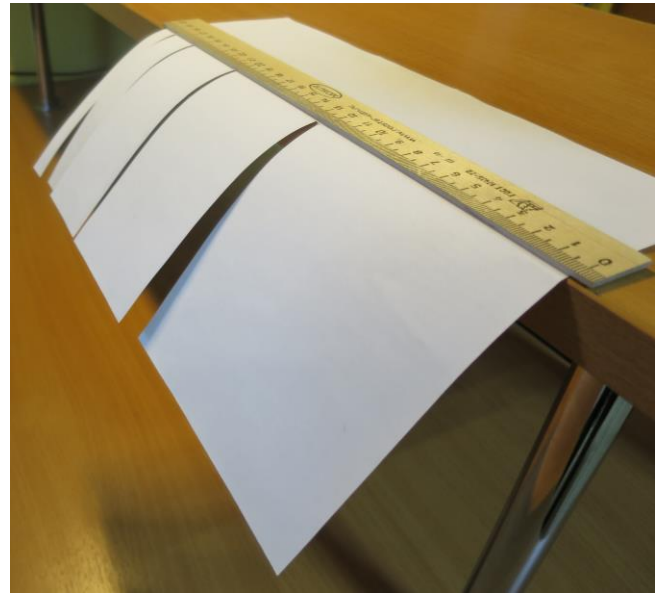
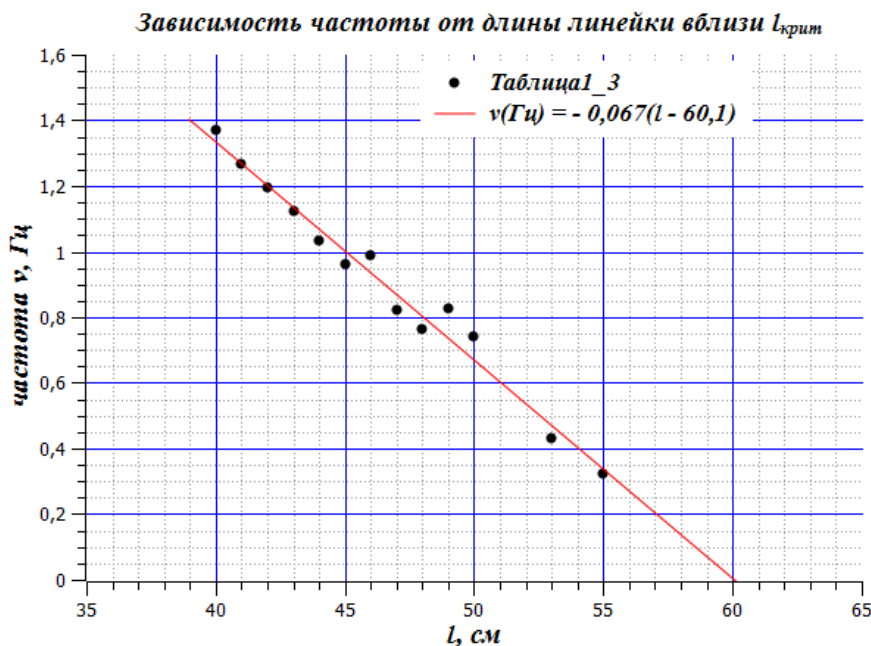


Рис. 5

3. Непосредственное измерение даёт $\ell_{\text{кр}} = 55\text{-}65$ см.

4. Снимаем зависимость $T(\ell)$.

5. Строим график $\nu(\ell)$.



6. Проводим через экспериментальные точки наилучшую прямую.

Эта прямая имеет вид:

$$\nu(\text{Гц}) = -0,067\{\ell(\text{см}) - 60,1\}.$$

Критическую длину определяем, экстраполируя зависимость $\nu(\ell)$ до пересечения с осью абсцисс (ℓ), т.е. в значение $\nu = 0$. (Очевидно, что при $\ell = \ell_{\text{кр}}$ из-за отсутствия возвращающей силы период $T \rightarrow \infty$ и, соответственно, $\nu \rightarrow 0$).

Из графика: $\ell_{\text{кр}} = (60 \pm 1)$ см.

7. Из теоретического введения и (3): $\ell_{\text{кр}}^3 = 2E\delta^2/3\rho g = 2c_{\text{зв}}^2\delta^2/3g.$

Скорость звука $c_{\text{зв}}^{\text{I}} = (3g\ell_{\text{кр}}^3/2\delta^2)^{1/2} = 1783 \text{ м/с}.$

8. Снимаем зависимость $y = y(\ell).$

9. Из теоретического введения и (4): $y = 3\rho g\ell^4/2E\delta^2 = 3g\ell^4/2c_{\text{зв}}^2\delta^2.$

Учитывая, что $\ell_{\text{кр}}^3 = 2c_{\text{зв}}^2\delta^2/3g$, получаем: $y = y(\ell_{\text{кр}}, \ell) = \ell^4/\ell_{\text{кр}}^3.$

10. В координатах (y, ℓ^4) график зависимости $y(\ell)$ – прямая линия с угловым коэффициентом $A = 1/\ell_{\text{кр}}^3$. Строим линеаризованный график $y(\ell^4)$. Точки хорошо ложатся на прямую $y(\text{см}) = 4,48 \cdot 10^{-6} \ell^4(\text{см}) \rightarrow \ell_{\text{кр}} = (1/A)^{1/3} = 60,7 \text{ см}.$

Этот результат в пределах погрешности совпадает с $\ell_{\text{кр}} = 60 \text{ см}$, полученной методом колебаний.

11. $c_{\text{зв}}^{\text{II}} = (3g\ell_{\text{кр}}^3/2\delta^2)^{1/2} = 1814 \text{ м/с}.$

12. Различие $c_{\text{зв}}^{\text{I}}$ и $c_{\text{зв}}^{\text{II}}$ составляет $\Delta c/c \approx 2\%$. Это означает, что в пределах погрешности результаты «метода колебаний» и «метода стрелы прогиба» согласуются.

Критерии оценивания

1. Исследована зависимость $y(b)$ и установлено что $s = p = 0$	1 балл
2. Определены показатели степеней в формулах (1) и (2)	2 балла
3. Проведено непосредственное измерение $\ell_{кр}$	0,5 балл
4. Снята зависимость $T(\ell)$	2 балла
Снято 10 и более точек	2 балла
Снято 6 – 9 точек	1 балл
Если точек меньше 6	0 баллов
5. Построен график $v(\ell)$.	1,5 балла
6. Нахождение $\ell_{кр}$:	1 балл
Через экспериментальные точки проведена «наилучшая» прямая	0,5 балла
найдена $\ell_{кр}$	0,5 балла
7. Найдена скорость звука $c_{зв}^I$	1 балл
Отклонение от «эталона» не более 12%	1 балл
Отклонение от «эталона» не более 25%	0,5 балла
8. Снята зависимость $y = y(\ell)$	1,5 балла
Снято 10 и более точек	1,5 балла
Снято 6 – 9 точек	1 балл
Если точек меньше 6	0,5 балла
9. Получено соотношение $y = y(\ell_{кр}, \ell) = \ell^4 / \ell_{кр}^3$	1,5 балла
10. График $y(\ell)$, построенный в координатах осей (y, ℓ^4) – прямая линия	1,5 балла
11. Найдена $\ell_{кр}$	0,5 балла
12. Найдена скорость звука $c_{зв}^{II}$	0,5 балла
13. Показано, что в пределах погрешности результаты «метода колебаний» и «метода стрелы прогиба» согласуются.	0,5 балла